

0.1 48. Hausaufgabe

0.1.1 Auflösung der Differentialgleichung fürs Mechanische

$$Dx + m_{\text{eff}}\ddot{x} = 0;$$

Ableiten nach der Zeit bringt:

$$D\dot{x} + m_{\text{eff}}\dot{\ddot{x}} = 0;$$

Da die Sinus-Funktion nach zweimaligem Ableiten wieder zum Sinus führt (nur mit umgekehrten Vorzeichen), vermuten wir:

$$\dot{x} = \hat{x} \cdot \sin \omega t;$$

Ableiten bestätigt unsere Vermutung:

$$\ddot{x} = \hat{x}\omega \cdot \cos \omega t;$$

$$\dot{\ddot{x}} = -\hat{x}\omega^2 \cdot \sin \omega t;$$

Einsetzen bringt dann:

$$D\hat{x} \cdot \sin \omega t - m_{\text{eff}}\hat{x}\omega^2 \cdot \sin \omega t = 0;$$

Kürzen von \hat{x} und $\sin \omega t$ führt zu:

$$D - m_{\text{eff}}\omega^2 = 0;$$

Das Kürzen ist deswegen zulässig, weil keine Lösungen verloren gehen, wenn \hat{x} oder $\sin \omega t$ 0 sind: in diesen Fällen ist die Gleichung immer erfüllt.

ω errechnet sich damit zu

$$|\omega| = \sqrt{\frac{D}{m_{\text{eff}}}};$$

Nimmt man für m_{eff} die Spuleninduktivität L und statt D $\frac{1}{C}$ erhält man die bekannte Gleichung für den elektromagnetischen Schwingkreis; unsere Herleitung ist also korrekt.

(Benötigte Zeit: 17 min)