29.01.2006

0.1 49. Hausaufgabe

0.1.1 Zusammenfassung der Stunde: Differentialgleichungen

Differentialgleichungen unterscheiden sich von „normalen“ Gleichungen darin, dass man nicht nach bestimmten Zahlen, sondern nach bestimmten Funktionen sucht, welche eine Gleichung erfüllen. Beispiel:

$\mathrm{f}'(x) + \mathrm{f}''(x) = 0;$

Eine Funktion, die diese Gleichung erfüllt, ist f mit $\mathrm{f}(x) = 0$. Oftmals spart man sich das Ausschreiben des Parameters:

$\mathrm{f}' + \mathrm{f}'' = 0;$

$\dot{\mathrm{f}} + \ddot{\mathrm{f}} = 0;$

Differentialgleichung sind im Allgemeinen nur sehr schwer analytisch lösbar; oft kann man auch nur Näherungslösungen angeben. Dabei ist es sehr leicht, schwer zu lösende Differentialgleichungen zu konstruieren:

$\mathrm{f}^{(n)}(x) + \ln_{\mathrm{f}'(\mathrm{f}''(x)+1)} \mathrm{f}(x) + \int_{\mathrm{f}''(42)}^{\mathrm{f}'(23)} \mathrm{f}(x)\mathrm{f}'(x)\,\mathrm{d}x + 1 = 0$ mit $n = \int_0^1 \mathrm{f}(\mathrm{f}'(\mathrm{f}''(\cdots(x)\cdots)))\,\mathrm{d}x;$

Nicht analytisch lösbare Gleichungen bezeichnet man als „nicht integrabel“.

	Bekannte Gleichungen	Differentialgleichungen
Definitionsmenge	Menge von Zahlen, z.B. $\mathbb{R}_0^+$	Menge von Funktionen von einer Menge von Zahlen nach einer Menge von Zahlen, z.B. $\left\{\mathrm{f} \;\middle|\; D_\mathrm{f} = \mathbb{R} \wedge W_\mathrm{f} = \mathbb{R}_0^+\right\}$
Lösungsmenge	Irgendeine Teilmenge der Definitionsmenge	Irgendeine Teilmenge der Definitionsmenge
Oft genutzte Operationen	$+, \cdot, \ldots$	Differenzieren, Integrieren, ...

Differentialgleichungen spielen in der Physik eine wichtige Rolle, da man mit ihnen viele dynamischen Vorgänge beschreiben kann. Beispielsweise ist das Induktionsgesetz,

$$\left|U_{\text{ind}}\right| = n\left|\dot{\phi}\right|,$$

auch eine Differentialgleichung:

$$\left|U_{\text{ind}}\right| = n\left|\phi'(t)\right|;$$

Fragen:

- Differentialgleichungen handeln zwar von Funktionen, aber immer noch von Funktionen von Zahlen zu Zahlen. Hat man den Begriff „Differentialgleichung" auf allgemeine Funktionen von einer Menge A nach einer Menge B erweitert?

- Kann man überhaupt auch auf anderen Mengen als den reellen Zahlen differenzieren?

  (Auf den natürlichen Zahlen zu differenzieren ist möglich (!), allerdings konnte ich das nicht nachvollziehen.)

- Kann man auf Mengen, die nicht aus Zahlen bestehen, differenzieren?

- Man kann Funktionen ja einmal, zweimal, dreimal etc. differenzieren. Dies scheint mir eine Beschränkung zu sein – kann man also evtl. Funktionen auch „eineinhalb" Mal differenzieren?

  (Wenn überhaupt wird dann vermutlich der Begriff der „eineinhalb Mal differenzierten Funktion" nicht mehr viel mit der ursprünglichen Definition der Differenzierung zu tun haben – aber die Fakultätsfunktionen (z.B.) hat man auch sinnvoll erweitern können, auch, wenn dann die ursprüngliche Definition ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$) nicht mehr in der erweiterten Definition erkannbar ist. (Und die Potenzierung hat man auch von einer simplen Kurzschreibweise der Multiplikation ($a^b = \underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ Mal}}$) erweitern können ($a^b$ mit $b \in \mathbb{R}$ oder sogar $b \in \mathbb{C}$).) Eine Erweiterung der Differenzierung scheint mir daher sinnvoll.)

(Benötigte Zeit: 67 min)