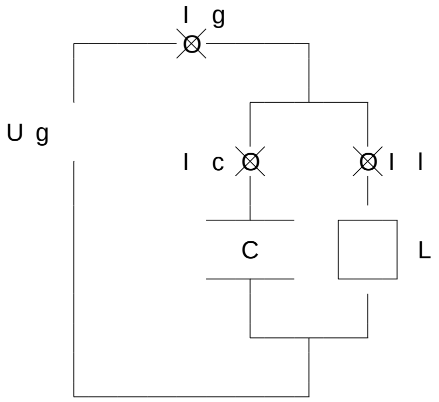
15.02.2006

0.1 60. Hausaufgabe

0.1.1 Wechselstromkreisanalyse



Wechselstromwiderstände von Kondensator und Spule

$R_{C_\omega} = \frac{1}{\omega C}$;

$R_{L_\omega} = \omega L$;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;

$\hat{U}_G = \sqrt{2}\, U_{G_{\text{eff}}}$;

Terme für den Gesamtwiderstand und die Ströme $I_{G_\omega}(t)$, $I_{C_\omega}(t)$, $I_{L_\omega}(t)$

$$\Rightarrow R_\omega = \frac{1}{\frac{1}{R_{C_\omega}} + \frac{1}{R_{L_\omega}}} = \frac{\omega L}{\omega^2 LC + 1};$$

$$\Rightarrow I_{G_\omega}(t) = \frac{U_{G_\omega}(t)}{R_\omega} = \hat{U}_G \sin \omega t \cdot \frac{\omega^2 LC+1}{\omega L};$$

$$\Rightarrow I_{C_\omega}(t) = \frac{U_{G_\omega}(t)}{R_{C_\omega}} = \hat{U}_G \sin \omega t \cdot \omega C = \underbrace{\hat{U}_G \cdot \omega C}_{\hat{I}_{C_\omega}} \cdot \sin \omega t;$$

$$\Rightarrow I_{L_\omega}(t) = \frac{U_{G_\omega}(t)}{R_{L_\omega}} = \hat{U}_G \sin \omega t \cdot \frac{1}{\omega L};$$

Grenzwertbetrachtungen

- Betrachtung des Gesamtwiderstandes R_ω:
  $\lim\limits_{\omega\to 0\frac{1}{\mathrm{s}}} R_\omega = 0\,\Omega$; (Einsetzen)
  $\lim\limits_{\omega\to \infty\frac{1}{\mathrm{s}}} R_\omega = 0\,\Omega$; (Grad des Polynoms des Zählers kleiner als der des Nenners)
  $R_{\omega_0} = \dfrac{L}{\sqrt{LC}\left(\frac{1}{LC}LC+1\right)} = \sqrt{\frac{L}{2C}}$;
  Anschaulich: Bei $\omega \to 0\frac{1}{\mathrm{s}}$ liegt Gleichstrom vor; der Kondensator leitet also gar nicht und die Spule ideal. Bei $\omega \to \infty\frac{1}{\mathrm{s}}$ leitet die Spule gar nicht und der Kondensator ideal.

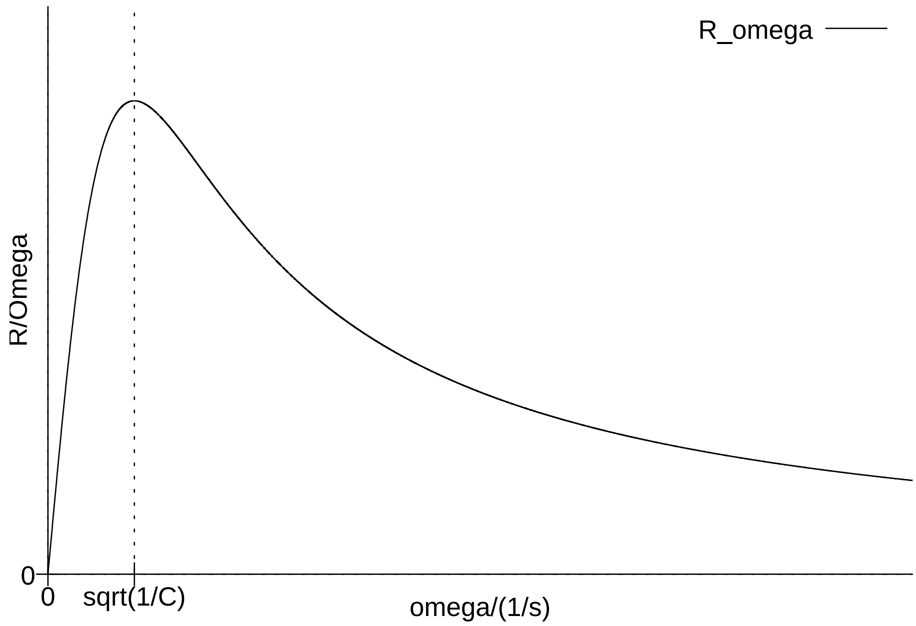
- Betrachtung des Stroms durch den Kondensator $C_{L_\omega}(t)$:
  $\lim\limits_{\omega\to 0\frac{1}{\mathrm{s}}} I_{C_\omega}(t) = 0\,\mathrm{A}$; (Einsetzen)
  Bei Gleichstrom ist der Kondensator ein Nichtleiter, $I_{C_\omega}(t)$ ist Null.
  $\lim\limits_{\omega\to \infty\frac{1}{\mathrm{s}}} I_{C_\omega}(t)$ ist nicht definiert (Sinus konvergiert nicht). Stattdessen Betrachtung von $\hat{I}_{C_\omega}$:
  $\hat{I}_{C_\omega} = \hat{U}_G \cdot \omega C \to \infty\,\mathrm{A}$ für $\omega \to \infty\frac{1}{\mathrm{s}}$;
  $I_{C_{\omega_0}}(t) = \hat{U}_G \sin\sqrt{\frac{t^2}{LC}} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$;

- Betrachtung des Stroms durch die Spule $I_{L_\omega}(t)$:
  $\lim\limits_{\omega\to 0\frac{1}{\mathrm{s}}} I_{L_\omega}(t) = \lim\limits_{\omega\to 0\frac{1}{\mathrm{s}}} \frac{\hat{U}_G}{L}\frac{\sin\omega t}{\omega} = \lim\limits_{\omega\to 0\frac{1}{\mathrm{s}}} \frac{\hat{U}_G}{L}\frac{\sin\omega t}{\omega t}\cdot t = \frac{\hat{U}_G}{L}\cdot t$; ($\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$)
  Damit nimmt der Strom proportional mit der Zeit zu. Dies entspricht unseren Erwartungen: Da die Spule bei Gleichstrom ($\omega \to 0\frac{1}{\mathrm{s}}$) ein idealer Leiter ist, ist ihr Widerstand Null und damit geht der Strom für $t \to \infty\,\mathrm{s}$ gegen Unendlich.
  $\lim\limits_{\omega\to \infty\frac{1}{\mathrm{s}}} I_{L_\omega}(t) = 0\,\mathrm{A}$; (Zähler „schwankt“ zwischen $-\hat{U}_G$ und $\hat{U}_G$, Nenner geht gegen Unendlich)
  Die Spule ist bei „unendlich frequenten“ Wechselstrom ein Nichtleiter.
  $I_{L_{\omega_0}}(t) = \hat{U}_G \sin\sqrt{\frac{t^2}{LC}} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$;

Abschließende Bemerkungen

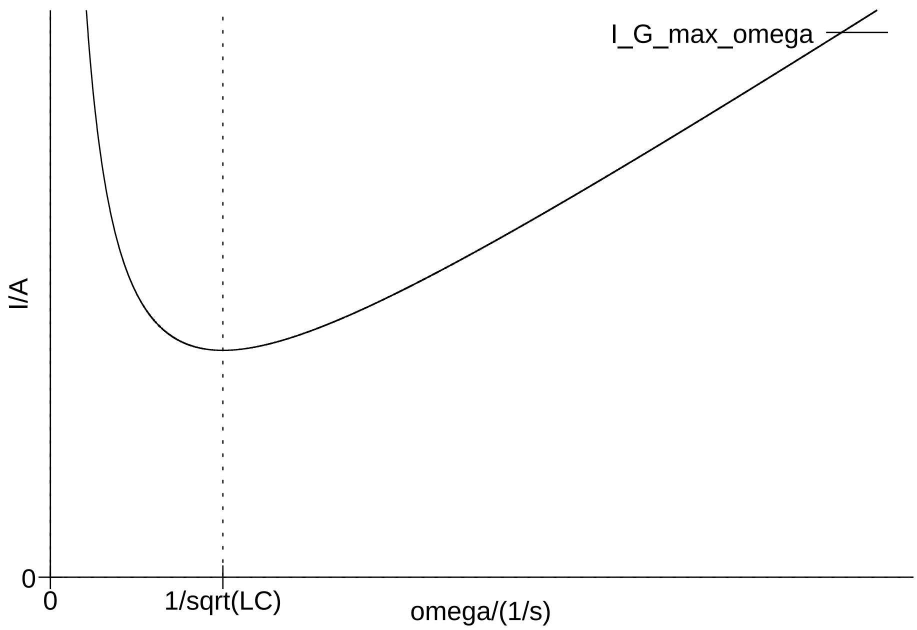
Im Resonanzfall ist $I_{C_{\omega_0}}(t)$ für alle Zeitpunkte t gleich $I_{L_{\omega_0}}(t)$!

Graph des Gesamtwiderstandes in Abhängigkeit von ω



Interessant ist, dass der Gesamtwiderstand bei $\omega = \sqrt{\frac{1}{C}}$ ist (ermittelbar durch den Ansatz $R'_\omega = 0\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$). Dieses ω ist nicht von L abhängig!

Graph der maximalen Generatorstromstärke in Abhängigkeit von ω

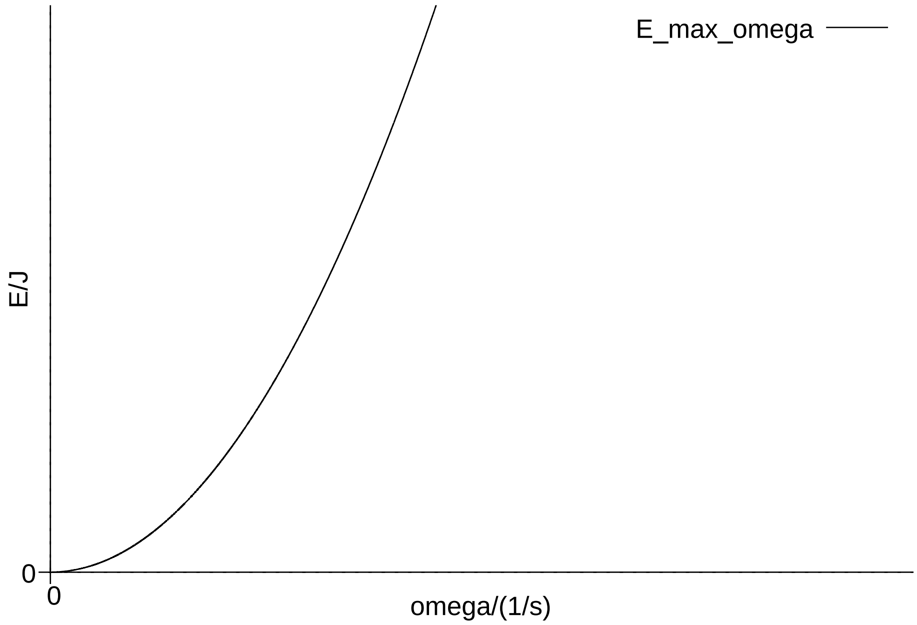


Interessant ist, dass die Scheitelstromstärke des Generators bei ω_0 minimal ist (ermittelbar durch den Ansatz $\hat{I}'_{G_\omega} = 0\,\mathrm{C}$).

Graph der maximalen Energie in Abhängigkeit von ω

$E_{\max_\omega} = E_{L_{\max_\omega}} + E_{C_{\max_\omega}} = \frac{1}{2}L\omega^2 \cdot \hat{Q}^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}\frac{1}{C} \cdot \hat{Q}^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}\hat{Q}^2 \left(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t\right) \left(L\omega^2 + \frac{1}{C}\right) = \frac{1}{2}\hat{Q}^2 \left(L\omega^2 + \frac{1}{C}\right);$

Also nimmt der maximale Energieinhalt mit größer werdendem ω zu; es ergibt sich kein Umkehrpunkt.



(Benötigte Zeit: 140 min)