21.02.2006

0.1 64. Hausaufgabe

0.1.1 Abituraufgabe 2001-6/1

Im idealen elektromagnetischen Schwingkreis haben die Spule und alle leitenden Verbindungen keinen OHMschen Widerstand.

a) Leiten Sie für die Ladung $Q(t)$ auf dem Kondensator die Differentialgleichung

$L\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = 0\,\mathrm{V}$

der ungedämpften Schwingung her.

$U_{\mathrm{ges}} = 0\,\mathrm{V}; \Leftrightarrow U_L + U_C = 0\,\mathrm{V}; \Leftrightarrow L\dot{I}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0\,\mathrm{V}; \Leftrightarrow$

$L\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = 0\,\mathrm{V};$

b) Leiten Sie her, welcher Zusammenhang zwischen den Größen L, C und ω bestehen muss, damit $Q(t) = Q_0 \cdot \cos\omega t$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

$Q(t) = Q_0 \cdot \cos\omega t;$

$\Rightarrow -L\omega 2 \cdot Q_0 \cdot \cos\omega t + \frac{1}{C} \cdot Q_0 \cdot \cos\omega = 0\,\mathrm{V}; \Rightarrow -L\omega^2 + \frac{1}{C} = 0\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{C}}; \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC};$

Stellen Sie mit dieser Lösung die elektrische und magnetische Energie jeweils als Funktion der Zeit dar und überprüfen Sie die Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes.

$E_L(t) = \frac{1}{2}LI^2(t) = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2(t) = \frac{1}{2}LQ_0^2\omega^2 \cdot \sin^2\omega t;$

$E_C(t) = \frac{1}{2}CU^2(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q_0^2 \cdot \cos^2\omega t;$

$\Rightarrow E_{\mathrm{ges}}(t) = E_L(t) + E_C(t) = \frac{1}{2}Q_0^2\left(L\omega^2 \cdot \sin^2\omega t + \frac{1}{C} \cdot \cos^2\omega t\right) =$
$= \frac{1}{2}Q_0^2\left(L\frac{1}{LC} \cdot \sin^2\omega t + \frac{1}{C} \cdot \cos^2\omega t\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q_0^2$ ist konstant.

c) Aus einem Kondensator der Kapazität $60\,\mu\mathrm{F}$ und einer Spule der Induktivität $250\,\mathrm{mH}$ wird ein Schwingkreis gebaut, dessen Schwingungen als ungedämpft betrachtet werden sollen. Am Anfang liegt die maximale Spannung $90\,\mathrm{V}$ am Kondensator.

Nach welcher Zeit ist die Kondensatorspannung zum ersten Mal auf $30\,\mathrm{V}$ gesunken? Wie groß ist dann die Stromstärke im Schwingkreis?

$U_C(t_1) = \frac{Q(t_1)}{C} = U_0 \cdot \cos \omega t_1 = 30\,\mathrm{V};$

$\Leftrightarrow \cos \omega t_1 = \frac{1}{3};$

$\Rightarrow \omega t_1 \approx 1{,}23;$

$\Rightarrow t_1 \approx \frac{1{,}23}{\omega} \approx 4{,}77 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s};$

$I(t_1) = \dot{Q}(t_1) = -\omega Q_0 \cdot \sin \omega t_1 = -C U_0 \cdot \omega \cdot \sin \omega t_1 \approx -1{,}3\,\mathrm{A};$

0.1.2 Zusammenfassung der Stunde: Leistung als Energiestromstärke

Ein Spannungsmessgerät benötigt zwei Anschlüsse, da der Ausdruck „Spannung“ nur dann sinnig ist, wenn man als Spannung die Potenzialdifferenz zwischen zwei Punkten misst. „Spannung an einem Punkt“ ist nicht sinnig.

(Natürlich ist es in der Umgangssprache zulässig, von der „Spannung am Kondensator“ zu reden – in diesem Fall meint man aber eigentlich die Spannung zwischen den beiden Polen des Kondensators)

Die Stromstärke dagegen misst man an einem Punkt, genauer: an einer bestimmten Fläche, nämlich der Querschnittsfläche durch einen Leiter.

Genau so ist es auch mit der Leistung: Die Leistung – als die Stromstärke der Energie – misst man ebenfalls mit Hilfe einer bestimmten Fläche. Möchte man die Leistung an einer bestimmten Stelle eines Kabels messen, so betrachtet man die Energie, die durch eine Querschnittsfläche des Leiters fließt.

Möchte man jedoch die Leistung eines größeren Objekts betrachten – z.B. eines Kondensators oder eine Spule – ist nicht klar, was (z.B.) die „Querschnittsfläche“ einer Spule ist. Daher ist diese Vereinfachung nicht zulässig und man muss stattdessen den Energiefluss durch eine Hüllfläche betrachten.

Integriert man nun über die Hüllfläche die Energiestromstärkedichten ($\left[1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^2}\right]$) auf, so erhält man die Leistung des sich im Inneren des durch die Hüllfläche aufgespannten Raums befindlichen Objekts bzw. der Objekte.

Der Begriff „Leistung“ ist veraltet. „Energiestromstärke“ tritt die Bedeutung besser und verschleiert nicht die Zusammenhänge. Die ursprüngliche Wahl des Begriffs „Leistung“ kommt wohl daher, dass zu dem Zeitpunkt, als der Leistungsbegriff eingeführt wurde, das Wissen über Energie noch sehr begrenzt war.

Außerdem kann man im Allgemeinen Leistung (wie auch Stromstärke) einfacher messen als Energie (bzw. Ladung). Mit dieser Einstellung im Hinterkopf liegt es natürlich nicht nahe, den viel abstrakteren Begriff „Energie" in die Namensgebung miteinzubeziehen.

Kommt man jedoch von einem theoretischen Standpunkt, liegt es sehr nahe, die „Grundbegriffe" (Energie, Ladung) statt der abgeleiteten Begriffe (Leistung, Stromstärke) zu verwenden.

0.1.3 Zusammenfassung der Stunde: Durchschnittswerte

Interessant ist die Frage, was beim elektromagnetischen Schwingkreis die Durchschnittswerte der Ladung, der Stromstärke, der Spannung, der Leistung und der Energie sind.

Dabei ist die so gestellte Frage unscharf formuliert: Die Angabe eines Intervalls, über das der Durchschnittswert berechnet werden soll, ist unverzichtbar. Dabei hat man sich auf eine Periode als Standard geeinigt.

Beim elektromagnetischen Schwingkreis ist die durchschnittliche Stromstärke, wie auch die Ladung und die Spannung, Null: Positive Werte wechseln sich mit negativen gleichmäßig ab.

Auch ist die durchschnittliche Leistung Null; es wechseln sich ebenfalls positive und negative Werte ab. Die durchschnittliche Energie dagegen ist nicht Null: Die Energie – proportional zu $I^2(t)$ bzw. $U^2(t)$ – ist immer größergleich Null. Somit kann die Durchschnittsenergie nicht Null sein.

0.1.4 Zusammenfassung der Stunde: Umgehen mit „zusammengesetzten" Integralen

Da die Rechenregel $\int_a^b \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ gilt, liegt es nahe, auch die Gültigkeit der von $+$ auf $\cdot$ übertragenen Regel zu vermuten, also $\int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$.

Diese Gleichung gilt allerdings nur in Sonderfällen; sie ist allgemein nicht gültig. Beispiel:

$\int_0^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 0;$

$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = \pi \neq \int_0^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x \cdot \int_0^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 0;$

Ähnliches gilt für den Term für den Energieinhalt mit U und I:

$\int_{t_0}^{t_0+T} U(t) \, I(t) \, \mathrm{d}t \neq 0 \, \mathrm{J},$

obwohl das Integral von sowohl $U(t)$ als auch $I(t)$ nach einer vollständigen Periode Null ist.

(Benötigte Zeit: 83 min)