05.04.2006

0.1 76. Hausaufgabe

0.1.1 Exzerpt von B. S. 134: HUYGENSsches Prinzip

Trifft eine Welle auf Barriere, die – idealisiert – nur in einem einzigen Punkt durchlässig ist, bildet sich im Öffnungspunkt eine Kreiswelle – bzw, im Dreidimensionalen – eine Kugelwelle aus. Dabei spielt es keine Rolle, ob die eingehende Welle eine Kreiswelle oder eine gerade Welle ist. Auch ist die Phase der eingehenden Welle nicht relevant.

Öffnet man die Barriere in weiteren Punkten, bilden sich bei jeder Öffnung Kreiswellen aus, wenn eine gerade Welle die Barriere trifft. Diese Kreiswellen überlagern sich zu einer geraden Welle gleicher Ausbreitungsrichtung und Frequenz wie die ursprüngliche Welle.

Lässt man die Zahl der punktförmigen Öffnungen gegen unendlich gehen, kommt man zum HUYGENSschen Prinzip: Man kann sich denken, dass jeder Punkt einer Wellenfront Ausgangspunkt für neue Kreis- bzw. Kugelwellen – Elemanterwellen – ist. Diese bewegen sich mit gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit und Frequenz wie die ursprüngliche Welle.

Die unendlich vielen Elementarwellen überlagern sich; es entsteht der Eindruck einer durchgehenden Welle.

Mit dem HUYGENSschen Prinzip kann man einige Wellenphänomene anschaulich deuten. Es ist mathematisch kein Problem, die Überlagerung unendlich vieler Kreiswellen zu modellieren.

Das Prinzip geht auf den niederländischen Astronom, Mathematiker und Physiker Christiaan Huygens (1629–1695) zurück und wird auch als HUYGENS–FRESNELsches Prinzip bezeichnet.

0.1.2 Exzerpt von B. S. 135: Reflexion und Brechung ebener Wellen

Mit dem HUYGENSschen Prinzip kann man Reflexion und Brechung erklären.

Die Trennfläche zwischen zwei Medien kann man sich als Barriere vorstellen, welche unendlich viele unendlich kleine punktförmige Öffnungen aufweist. Trifft eine Welle auf diese „Barriere“, entstehen nach dem HUYGENSschen Prinzip bei jeder Öffnung Elementarwellen.

Diese Kreiswellen breiten sich in beiden Medien aus. Der Teil der Elementarwellen, welcher sich im ursprünglichen Medium ausbreitet, überlagert sich zur reflektierten Welle.

Der Teil, der sich im anderen Medium ausbreitet, überlagert sich zur gebrochenen Welle.

Trifft eine gerade Welle auf eine Trennfläche zwischen zwei Medien, sind reflektierte und gebrochene Welle ebenfalls gerade Wellen; die unendlich vielen Kreiswellen überlagern sich zu einer geraden Welle.

(Die ursprüngliche Welle „verschwindet“ – nach der „Geburt“ der Elementarwellen „stirbt“ die Elternwelle. Dies ist kein physikalischer Widerspruch, wenn man sich vorstellt, dass eine Welle ständig Samen neuer Elementarwellen ist.)

0.1.3 Exzerpt von B. S. 136: Brechungsgesetz

Es ist nicht die Ausbreitungsgeschwindigkeit c oder die Wellenlänge λ, die eine Welle ausmacht, sondern die Wellenfrequenz f.

Wechselt eine Welle das Medium, ändern sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Wellenlänge, nicht jedoch die Frequenz. Dies gilt auch für Reflexion und Brechung.

Geometrische Überlegungen führen zum Brechungsgesetz: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$;

Der Einfallswinkel α und Austrittswinkel α von Wellenfronten gegenüber der Trennfläche zwischen den Medien sind identisch. β ist der Winkel, den die Wellenfronten der gebrochenen Welle mit der Trennfläche bildet.

Walter Fendt hat ein anschauliches Java-Applet zum Thema geschrieben.[1]

[1] http://www.walter-fendt.de/ph11d/huygens.htm

0.1.4 Exzerpt von B. S. 137: Beugung, Streuung

Treffen gerade Wellen auf ein nicht durchdringbares Hindernis auf, vereinen sich die „zerteilten“ Wellen nach dem Hindernis wieder. Treffen gerade Wellen auf eine unendlich große Barriere, die an einer Stelle geöffnet ist, verbreitern sich die Wellen über die Breiten der Öffnung hinaus.

Die Stellen, von denen man vermuten würde, dass die Wellen sie eigentlich nicht erreichen, nennt man Schattenraum. Den Effekt, dass Wellen in den Schattenraum eindringen, nennt man Beugung.

Wellen mit kleiner Wellenlänge werden schwächer, Wellen mit großer Wellenlänge stärker gebeugt.

Beugung kann man mittels des HUYGENSschen Prinzips erklären – die an den Rändern des Hindernisses bzw. der Öffnung entstehenden Elementarwellen breiten sich kreisförmig aus und dringen so in den Schattenraum ein.

Sind die Hindernisse bzw. Öffnungen im Vergleich zur Wellenlänge sehr klein, spricht man von Streuung. Idealisiert kann man in diesem Fall die Öffnung als punktförmig annehmen.

Beugung gibt es nur bei Wellen, nicht aber bei sich bewegenden Teilchen, also Teilchenstrahlen.

0.1.5 Exzerpt von B. S. 138ff.: Ausbildung stehender Wellen

Stehende Wellen bilden sich aus, wenn sich Wellen gleicher Frequenz, aber entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung, überlagern. Trifft beispielsweise eine Mikrowelle auf Metallstäbe, die parallel zu der Signalrichtung der Welle stehen, wird die Welle reflektiert und es kommt zur Ausbildung einer stehenden Welle.

Mathematisch lässt sich die einfallende Welle durch eine einfache sinusförmige Schwingung beschreiben:

$\mathcal{E}_{\text{ein}}(x,t) = \hat{\mathcal{E}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{T}t\right);$

Dabei ist λ ist die Wellenlänge, T die Schwingungsdauer.

Die reflektierte Welle läuft entgegengesetzt zur einfallenden Welle; mathematisch drückt man das aus, indem man das Vorzeichen des

Zeiteinflusses umkehrt – während die einfallende Welle die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ aufweist, beträgt die Winkelgeschwindigkeit der reflektierten Welle $-\omega = -\frac{2\pi}{T}$:

$\mathcal{E}_{\text{aus}}(x,t) = \hat{\mathcal{E}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right);$

Die Überlagerung der beiden Wellen ergibt die stehende Welle. Überlagerung drückt man mathematisch durch Addition aus; dass das Ergebnis eine stehende Welle ist, erkennt man daran, dass der Ort x im resultierenden Term nur noch für eine Amplitudenänderung, nicht aber für eine Ortsänderung verantwortlich ist:

$\mathcal{E}(x,t) = \mathcal{E}_{\text{ein}}(x,t) + \mathcal{E}_{\text{aus}}(x,t) = \hat{\mathcal{E}}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{T}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)\right] = \hat{\mathcal{E}} \cdot 2\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \underbrace{2\hat{\mathcal{E}}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)}_{\substack{\text{Amplitude der}\\ \text{stehenden Welle}}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$

0.1.6 Buch Seite 136, Aufgabe 1

In einer Wellenwanne läuft eine Welle von einem seichten Bereich in ein Gebiet mit tieferem Wasser unter dem Einfallswinkel von $45°$ und dem Brechungswinkel von $60°$.

a) Bestimmen Sie das Verhältnis der Geschwindigkeiten in beiden Teilen der Wellenwanne.

$\frac{\sin 45°}{\sin 60°} \approx 82\,\%;$

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit im flachen Teil, wenn sie im tiefen $25\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ist.

$\frac{\sin 45°}{\sin 60°} \cdot 25\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 20\,\frac{\text{cm}}{\text{s}};$

0.1.7 Buch Seite 136, Aufgabe 2

Wasserwellen bewegen sich in tiefem Wasser mit der Geschwindigkeit $v_1 = 34\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Sie treffen unter dem Winkel $\alpha = 60°$ auf die Grenzlinie zu einem flacheren Teil, wo sie sich mit $v_2 = 24\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ bewegen. Erhöht man die Frequenz ein wenig, so sinkt die Geschwindigkeit im tieferen Teil auf $v_1' = 32\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

a) Berechnen Sie in beiden Fällen den Brechungswinkel.

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}; \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha;$

$\beta \approx 38°; \quad \beta' \approx 41°;$

b) Die Wellenlänge im tieferen Teil beträgt im ersten Versuch $\lambda = 1{,}7\,\mathrm{cm}$. Wie groß ist die Wellenlänge im flacheren Teil und welche Frequenz hatte die Welle?

$v_1 = \lambda f; \Leftrightarrow f = \frac{v_1}{\lambda} = \frac{34\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}}{1{,}7\,\mathrm{cm}} \approx 20\,\frac{1}{\mathrm{s}};$

$v_1' = \lambda' f;$

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1'}{v_2} = \frac{\lambda' f}{v_2} = \frac{\lambda'}{v_2}\frac{v_1}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{v_1}{\lambda_2' f} = \frac{\lambda'}{\lambda_2'};$

$\Leftrightarrow \lambda_2' = \lambda'\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \approx 1{,}3\,\%;$

0.1.8 Fragen

- Ist es richtig, dass man die Energie von Lichtwellen über $E = m_{\text{Photon}}c^2 = m_{\text{Photon}}\,(\lambda f)^2$ berechnen kann? Muss noch ein zusätzlicher Faktor eingefügt werden (die Energie einer Lichtwelle sollte (naiv gedacht) größer sein als die eines Photons)?

- Aus wie vielen Photonen besteht eine Lichtwelle? (Oder ist diese Frage ähnlich unsinnvoll wie „wie viele Elektronen passen in $1\,\mathrm{m}^3$?“?)

- Wellenfronten zeichnen wir ja als senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehende (Halb-)Geraden;

  Nehmen wir einmal an, dass eine Lichtwelle waagrecht von links nach rechts verläuft und sich unendlich weit erstreckt. Ist dann $\mathcal{E}((x_0, y_0), t)$ für alle Δy gleich $\mathcal{E}((x_0, y_0 + \Delta y), t)$? Existiert dann die Welle an jedem Raumpunkt (Raum im Sinne von $\mathbb{R}^3$, also mathematisch dicht)?

  Wie passt dies zur Vorstellung von Lichtwellen als Ansammlung von Photonen – diese können ja nicht – im „Teilchenmärchen“ gedacht – an den unendlich vielen Punkten zwischen (x_0, y_0) und $(x_0, y_0 + \Delta y)$ existieren. (Vermutliche Antwort: Das Teilchenmodell wird zu Recht als „Teilchenmärchen“ bezeichnet; das Teilchenmodell ist in diesem Fall nicht anwendbar.)

- „Wird eine Welle zugleich gebrochen und reflektiert, müssen die Einzelenergien der gebrochenen und der reflektierten Welle in der Summe die Energie der Ausgangswelle ergeben.“ – Stimmt das?

  Kann man die einzelnen Energiebeträge quantifizieren?

- Folgendes Szenario: Eine vollständig polarisierte elektromagnetische Welle (Signalrichtung gegenüber einer Referenzebene $0°$) trifft auf einen HERTZschen Dipol (Winkel gegenüber der Referenzebene beispielsweise $30°$). Der HERTZsche Dipol wird durch die elektromagnetische Welle angeregt und strahlt selbst elektromagnetische Wellen ab; es kommt zur Reflexion.

  Um eine genauere Aussage über die reflektierte Welle zu erhalten, zerlegt man die einfallende Welle in einen Teil parallel zum HERTZschen Dipol (also Winkel gegenüber der Referenzebene $30°$), der vollständig reflektiert wird, und einen Teil, der senkrecht zum HERTZschen Dipol steht ($-60° \mathrel{\widehat{=}} 300°$) und nicht reflektiert wird.

  Die Ausbreitungsrichtung der reflektierten Welle ist der Ausbreitungsrichtung der ursprünglichen Welle entgegengesetzt, aber die Signalrichtung der reflektierten Welle ist gegenüber der Referenzebene $30°$, nicht $0°$ wie die einfallende Welle.

  Kommt es trotzdem zur Ausbildung einer stehenden Welle, obwohl die Signalrichtungen nicht identisch sind? (Mathematisch sehe ich die Lösung darin, dass man die Signalrichtung nicht als Skalar, sondern als Vektor auffast, und dann zur Aufstellung der die stehende Welle beschreibenden Gleichung eine Vektoraddition vornimmt. Stimmt dies auch physikalisch?)

- Wie berechnet man, bzw. in welcher Einheit gibt man den Polarisationsgrad einer Welle an?