21.02.2007

1 Grenzwerte bei rationalen Funktionen

1.1 Grundlegende Terminologie

$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$;

- z: Zählerpolynom

  n: Nennerpolynom

- Zählergrad: Größter Exponent, der im Zählerpolynom z verwendet wird

  Nennergrad: Größter Exponent, der im Nennerpolynom n verwendet wird

  Höchste Potenz: $x^{\text{insgesamt größter Exponent}}$

- „Grenzwert im Unendlichen existiert nicht“:

  Man schreibt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$, meint aber (trotz des Gleichheitszeichens), dass der Grenzwert nicht existiert – dass es keinen Wert gibt, dem sich f immer weiter annähert; stattdessen divergiert f („haut ins Unendliche ab“).

- $\lim\limits_{x \to x_0+}$: Man nähert sich von rechts, also von größeren x-Werten als x_0, an die Stelle x_0 an (andere Schreibweisen sind auch üblich)

  $\lim\limits_{x \to x_0-}$: Man nähert sich von links, also von kleineren x-Werten als x_0, an die Stelle x_0 an

Beispiel:
$f(x) = \frac{3x^2+5x}{9x^3-2x+3}$

- Zählerpolynom: $z(x) = 3x^2 + 5x$

  Nennerpolynom: $n(x) = 9x^3 - 2x + 3$

- Zählergrad: 2 (wg. $3x^2$)

  Nennergrad: 3 (wg. $9x^3$)

  Höchste Potenz: x^3

1.2 Verhalten im Unendlichen

Gefragt ist nach dem Grenzwert $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{z(x)}{n(x)}$

1.2.1 Anschaulich

Im Unendlichen (egal ob positiv oder negativ Unendlichen) zählen nur die jeweils höchsten Potenzen, die anderen „sind so klein, dass sie nichts ausmachen“.

Beispiele:

- $f(x) = \frac{3x^2+5x}{9x^3-2x+3} \approx \frac{3x^2}{9x^3} = \frac{1}{3x};$
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{3x} = 0;$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3x} = 0;$
- $f(x) = \frac{3x^2+5x}{9x^2-2x+3} \approx \frac{3x^2}{9x^2} = \frac{1}{3};$
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3};$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3};$
- $f(x) = \frac{3x^3+5x}{9x^2-2x+3} \approx \frac{3x^3}{9x^2} = \frac{x}{3};$
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{3} = \infty;$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{3} = -\infty;$

1.2.2 Formal

Zähler und Nenner beide durch die höchste Potenz teilen, also mit der höchsten Potenz kürzen.

Beispiele:

- $f(x) = \frac{3x^2+5x}{9x^3-2x+3};$
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+5x}{9x^3-2x+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2/x^3+5x/x^3}{9x^3/x^3-2x/x^3+3/x^3} = \frac{0+0}{9-0+0} = \frac{0}{9} = 0;$

- $f(x) = \frac{3x^2+5x}{9x^2-2x+3}$;
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+5x}{9x^2-2x+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2/x^2+5x/x^2}{9x^2/x^2-2x/x^2+3/x^2} = \frac{3+0}{9-0+0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$;
- $f(x) = \frac{3x^3+5x}{9x^2-2x+3}$;
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+5x}{9x^2-2x+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3/x^3+5x/x^3}{9x^2/x^3-2x/x^3+3/x^3} = ?$;
  Problem: Nenner ist Null $\to$ den Grenzwertübergang kann man nicht ausführen; der Grenzwert existiert nicht, f divergiert also.

1.2.3 Merkregeln

- Zählergrad $<$ Nennergrad: Funktion konvergiert gegen Null (bei beiden Seiten, also wenn gegen $-\infty$ und gegen $+\infty$ gehend)
- Zählergrad $=$ Nennergrad: Funktion konvergiert (bei beiden Seiten) gegen den Wert, der sich ergibt, wenn man alle bis auf die jeweils höchste Potenzen LÖSCHT
  Beispiel:
  $\lim \frac{3x^2+5x}{9x^2-2x+3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$;
- Zählergrad $>$ Nennergrad: Funktion divergiert; der Grenzwert existiert nicht
  Ob die Funktion gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt, wenn man gegen $+\infty$ oder $-\infty$ läuft, erkennt man am einfachsten über die anschauliche Argumentation.

1.3 Verhalten an einer bestimmten Stelle

Gefragt ist nach dem Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{z(x)}{n(x)}$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$; hier geht es also nicht um das Verhalten im Unendlichen.

1.3.1 Vorgehen zum Bestimmen des Grenzwerts an einer bestimmten Stelle

Kürzen

Man versucht, den Unterausdruck, der Probleme macht (weil er zu einer Division durch Null führen würde), zu kürzen:
$\lim\limits_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+} (x-2) = 1-2 = -1;$

Faktorisieren

Man versucht, Zähler- und Nennerpolynom zu faktorisieren, um danach kürzen zu können:
$\lim\limits_{x\to 1+} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \text{(wie oben)} = -1;$

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken über die Lösungsformel: $ax^2+bx+c = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$ mit $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$

Faktorisieren von kubischen Ausdrücken durch Erraten einer Nullstelle und anschließender Polynomdivision

h-Methode

Man drückt das Annähern gegen die Stelle x_0 durch Annähern an 0 aus. Diese Methode kann man nicht anwenden, wenn man eh schon den Grenzwert an der Stelle 0 bestimmen will.

Beispiel (Substitution $x = 1+h$):

$\lim\limits_{x\to 1+} \frac{x^2-3x+2}{(1+h)-1} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{(1+h)^2-3(1+h)+2}{1+h-1} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{1+2h+h^2-3-3h+2}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{h^2-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} (h-1) = -1;$

Man lässt das h immer von rechts gegen 0 gehen, unabhängig davon, ob der ursprüngliche Grenzwertprozess von links oder rechts durchgeführt werden sollte.

Man substituiert wie folgt:

- $x = x_0 + h$, wenn der ursprüngliche Grenzwertprozess von rechts ausgeführt werden sollte
- $x = x_0 - h$, wenn der ursprüngliche Grenzwertprozess von links ausgeführt werden sollte

1.3.2 Anwendungen des Grenzwerts an einer bestimmten Stelle

Behebung von Definitionslücken

Beispiel:

$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\};$

Man kann eine Funktion an einer Definitionslücke dann stetig ergänzen, wenn der Grenzwert von links mit dem von rechts an der Stelle übereinstimmt:

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \text{(wie oben)} = -1;$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \cdots = -1;$

Man kann somit folgende Funktion $\tilde{f}$ konstruieren, die in allen Stellen, an denen auch die ursprüngliche Funktion f definiert ist, mit f übereinstimmt, und die an der Definitionslücke – anders als f – kein Loch hat, sondern wohldefiniert ist:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{für } x \neq -1; \\ -1 & \text{für } x = -1; \end{cases}$$

Hat man zum Bestimmen der Grenzwerte faktorisiert, kann man $\tilde{f}$ auch nicht durch eine abschnittsweise Definition ausdrücken:

$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1} = (\ldots\text{faktorisieren}\ldots) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1};$

$\tilde{f}(x) = x - 2;$

Obacht: Auch wenn man den Funktionsterm der ursprünglichen Funktion kürzt, also schreibt...

$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1} = (\ldots\text{faktorisieren}\ldots) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x - 2;$

...so ist die ursprüngliche Funktion trotzdem nicht an der problematischen Stelle definiert! Der Definitionsbereich ändert sich nicht durchs Kürzen!

Überprüfung auf Stetigkeit

Eine Funktion f ist an einer Stelle x_0 genau dann stetig, wenn der Grenzwert von links mit dem von rechts und zusätzlich noch dem Funktionswert übereinstimmt; in Symbolen:

f stetig an $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0);$

Sollte einer der beiden Grenzwerte oder sogar beide Grenzwerte nicht existieren, so ist die Funktion an der jeweiligen Stelle nicht stetig.