

Sonstiges

Ingo Blechschmidt

8. August 2007

Inhaltsverzeichnis

I	Sonstiges	3
1	ToDo	4
2	Lehrer	4
3	Stundenpläne in 2005/2006	5
3.1	Berlow	5
3.2	Christoph	5
3.3	Dominik	5
3.4	Egon	6
3.5	Elmar	6
3.6	Fietz	6
3.7	Frieb	7
3.8	Harald	7
3.9	Ingo	7
3.10	Jantz	8
3.11	Johannes	8
3.12	Max	8

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	2
3.13 Michael	9
3.14 Peter	9
3.15 Vladimir	9
3.16 Klasse 11a	10
3.17 Sebastian	10
3.18 Egon	10
4 Stundenpläne in 2006/2007	11
4.1 Ingo	11
5 Freistunden	11
6 Impressum	11
7 Linux-Cheatsheet	11
7.1 Netzwerk	11
7.1.1 Schichten	11
7.1.2 Lokale IP-Adressen	12
7.1.3 Routing	12
7.1.4 DHCP	12
7.1.5 Telnet	12
7.1.6 SSH (Standard-TCP-Port 22)	13
7.1.7 HTTP	13
7.2 Dateisystem	13
7.3 Kommandozeilenbefehle	14
7.4 Vi	15
7.4.1 Aufruf	15
7.4.2 Kommandomodus	15
7.4.3 Eingabemodus	16
7.4.4 Superkommandomodus	16
7.5 Squid	16
7.6 CUPS	17

1	<i>TODO</i>	3
8	Grenzwerte bei rationalen Funktionen	17
8.1	Grundlegende Terminologie	17
8.2	Verhalten im Unendlichen	18
8.2.1	Anschaulich	18
8.2.2	Formal	19
8.2.3	Merkregeln	19
8.3	Verhalten an einer bestimmten Stelle	20
8.3.1	Vorgehen zum Bestimmen des Grenzwerts an einer bestimmten Stelle	20
8.3.2	Anwendungen des Grenzwerts an einer bestimmten Stelle	21

Teil I

Sonstiges

1 TODO

13.09.2005

2 Lehrer

25.02.2006

Lehrer	Kürzel	Kurs
		c14
		d15
		eth12
		f12
		sk12
	Ms	m12
	Sta	g14
Udo Bader	Ba	wr11
Harald Beck	Bk	e12
Christoph Becker	Bec	d24, g23
Ulrike Bethe	Be	C10
Peter Biet	Bi	ev11, ev12, ev20
Thomas Bayer	By	M12
Barbara Brenner	Bre	e13
Hannelore Drechsel	Dr	GEO12
Rosmarie Eder	Ed	k12
Hanna Fraenkel	Fk	g15
Reinhold Forster	Ft	G10
Wolfgang Funk	Fu	c20
Christian Gangloff	Gf	GEO20
Christoph Gräupner	Gr	Ph10
Prof. Dr. Eva-Maria Heinle	He	d16, F20, d22
Gertrud Hettenkofer	Hk	g16
Josef Holzhauser	Hh	C20
Dagmar Horn	Ho	e22
Paul Höfner	Hö	spXX
Verena Höret	R-Hö	c12
Maria Kienmoser	Kie	g21
Sonja Laleike	La	mu12, b15
Sonja Lerchl	Ler	L10
Dr. Werner Lorbeer	Lb	Ph20
Peter Ludwig	Lu	mu11, mu13
Ursula Maidl	Mai	d21
Dr. Nikolaus Miller	Mi	D20
Joachim Mücke	Mü	M21
Dr. Hermann Perz	Pz	c12
Karl Heinz Preßlein	Ps	ph11
Peter Schachner	Sch	ph13
Herbert Schuhknecht	Sk	m11
Gerhard Steinbach	St	M22

14.09.2005

3 Stundenpläne in 2005/2006

3.1 Berlow

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
sk12	c14	eth12	c14	d15	
f12	M12	Ph10		d15	
	Ph10	M12	f12	g12	
	Ph10	M12	eth12	M12	13.09.2005
Ph10	g12		d15	f12	
M12	sk12		Ph10	c14	
mul3		spxx			
mul3	d15	spxx			

3.2 Christoph

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
	ph13	k13	ph13	d16	
e13	GEO12	C10	m12	d16	
	C10	GEO12	e13	g15	
m12	C10	GEO12	k13	GEO12	14.09.2005
C10	g15	m12	d15	e13	
GEO12			C10	ph13	
ku13		spxx			
ku13	d16	spxx			

3.3 Dominik

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
	XXX	XXX	XXX		
XXX	XXX	XXX	XXX		
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	
XXX	XXX	XXX		XXX	14.09.2005
XXX		XXX	XXX	XXX	
XXX	XXX				
XXX		spxx			
		spxx			

3.4 Egon

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
XXX	XXX	XXX	XXX		
XXX	XXX	XXX	XXX		
XXX	XXX	XXX	XXX		
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	15.09.2005
XXX			XXX	XXX	
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	

3.5 Elmar

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	
XXX		XXX	XXX	XXX	
XXX			XXX		
XXX	XXX	XXX	XXX		
XXX		XXX		XXX	15.09.2005
	XXX	XXX		XXX	
XXX	XXX				
XXX	XXX				
XXX					

3.6 Fietz

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
			2k14	2d16	
2e13	2WR12	2C10	2m12	2d16	
2ph11	2C10	2WR12	2e13	2g15	
2m12	2C10	2WR12		2WR12	14.09.2005
2C10	2g15	2m12	2d16	2e13	
2WR12		2ph11	2C10	2k14	
2ku12	2ph11	spxx			
2ku12	2d16	spxx			

3.7 Frieb

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
		k12	mu11	d16	
b15	E14	WR11	m15	d16	
ph11	WR11	E14	b15	g13	
m15	WR11	E14	k12	E14	13.09.2005
WR11	g13	m15	d16	b15	
E14	ph11	ph11	WR11	mu11	
	d16	smxx			
		smxx			

3.8 Harald

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
c20	g23			e21	
d23		ev20	M21	c20	
M21		Ph20	d23	Ph20	
M21	M21	e21	d23	Ph20	13.09.2005
ev20	Ph20	g23			
	c20	M21	Ph20		
	d23				
e21					

3.9 Ingo

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
wr11		ev11		d16	
e13	M12	Ph10	c12	d16	
	Ph10	M12	e13	g16	
c12	Ph10	M12	ev11	M12	14.09.2005
Ph10	g16	c12	d16	e13	
M12	wr11		Ph10		
mu12		spxx			
mu12	d16	spxx			

3.10 Jantz

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
	ph13	k13	ph13	d16	
e13	WR12	CH10	m12	d16	
i11	CH10	WR12	e13	g16	
m12	CH10	WR12	k13	WR12	18.09.2005
CH10	g16	m12	d16	e13	
WR12		i11	CH10	ph13	
kuXXX	i11	spxx			
kuXXX	d16	spxx			

3.11 Johannes

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	
	XXX	XXX	XXX	XXX	
	XXX	XXX		XXX	
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	17.09.2005
XXX	XXX	XXX	XXX		
XXX	XXX		XXX	XXX	
XXX		XXX			
XXX		XXX			

3.12 Max

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
	XXX	XXX	XXX		
XXX	XXX	XXX	XXX		
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	13.09.2005
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	
XXX		XXX	XXX	XXX	
XXX	XXX	spxx			
XXX		spxx			

3.13 Michael

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
wr12		k12	mu11	d16	
c12	M12	L10		d16	
ph11	L10	M12	c12	g14	
	L10	M12	k12	M12	13.09.2005
L10	g14		d16	c12	
M12	wr12	ph11	L10	mu11	
	ph11	spxx			
	d16	spxx			

3.14 Peter

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
			ev12	d16	
b15	GEO12	C10	e12	d16	
m11	C10	GEO12	b15	g15	
e12	C10	GEO12		GEO12	13.09.2005
C10	g15	e12	d16	b15	
GEO12		m11	c10	ev12	
ku13	m11	spxx			
ku13	d16	spxx			

3.15 Vladimir

Mo	Di	Mi	Do	Fr	
wr12			k14	d13	
e13	M12	Ph10	c12	d13	
	Ph10	M12	e13	g12	
c12	Ph10	M12		M12	13.09.2005
Ph10	g12	c12	d13	e13	
M12	wr12		Ph10	k14	
mu13		spxx			
mu13	d13	spxx			

3.16 Klasse 11a

Mo	Di	Mi	Do	Fr
D	M	Ch	Ek	M
D	L	M	G	L
Re	E	Re	Sm	Ek
M	L	L	Sm	Ph
Ph	Ph	E	Ch	Mu
E	G	M	D	Ch
	D	Ku		
	E	Ku		

19.09.2005

3.17 Sebastian

3.18 Egon

Mo	Di	Mi	Do	Fr
	XXX	XXX	XXX	
XXX	XXX	XXX	XXX	
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX
XXX	XXX	XXX	XXX	XXX
XXX		XXX	XXX	XXX
XXX	XXX	spxx		
XXX		spxx		

13.09.2005

4 Stundenpläne in 2006/2007

4.1 Ingo

Mo	Di	Mi	Do	Fr
	M22			
Ph20			ev20	e23
M22	d26	PH20		d26
M22	d26	PH20	e23	M22
	ev20		Ph20	g26
	Ph20	M22		
Sport	e23			
Sport	mu20	g26	d26	
Sport	mu20			
Sport				

5 Freistunden

(Nach einer Idee von DFK; nur in der HTML-Version verfügbar.)

07.06.2005

6 Impressum

Ingo Blechschmidt
 86179 Augsburg
 Arberstr. 5
 E-Mail: iblech@web.de
 Tel.: +49 821 882955

27.07.2006

7 Linux-Cheatsheet

7.1 Netzwerk

7.1.1 Schichten

"Kabelphysik"

Binäre Daten
Ethernet
IP
TCP
HTTP, SSH, ...

7.1.2 Lokale IP-Adressen

192.168.x.y
172.16.x.y-172.32.x.y
10.x.y.z

»127.0.0.1« (symbolischer Name »localhost«) ist der jeweils aktuelle Rechner.

7.1.3 Routing

Clients haben keine direkte Verbindung zum Internet, sondern wissen nur, dass ein anderer Computer – der Router – „mehr Ahnung hat“ als sie. Anzeige der Routingtabelle mit »route -n« bzw. »ipconfig«.

7.1.4 DHCP

Der Server vergibt mittels DHCP dynamisch lokale IP-Adressen. Hat ein Client keine Verbindung zum Netzwerk, hat er möglicherweise gar keine IP-Adresse, weil er keine IP-Adresse vom Server beziehen konnte – mit »ipconfig« prüfen!

7.1.5 Telnet

TCP-Verbindung zu einem entfernten Rechner

```
telnet adresse port
```

Ohne Port-Angabe wird »23« genutzt („Telnet“).

7.1.6 SSH (Standard-TCP-Port 22)

SSH ist u.a. ein verschlüsseltes Telnet. Unter Windows PuTTY nutzen.

7.1.7 HTTP

Direkte Verbindung (Standard-TCP-Port 80)

```
GET Pfad HTTP/1.0
Host: Rechnername
```

Immer den vollständigen Pfad, einschließlich des ersten »/«, angeben!

Über eine Proxy (Standard-TCP-Port 3128)

```
GET URL HTTP/1.0
Host: Rechnername
```

Immer die vollständige URL-Adresse, einschließlich des »http://«, angeben!

7.2 Dateisystem

/	Wurzelverzeichnis
/bin	Wichtige Programme
/dev	Gerätedateien
/etc	Konfigurationsdateien
/home/*	Heimatverzeichnisse normaler Benutzer
/lib	Wichtige Bibliotheken
/proc	Pseudo-Dateisystem mit Systeminfos
/root	Heimatverzeichnis von root
/sbin	Wichtige nur-root-Programme
/tmp	Verzeichnis für temporäre Dateien
/usr	
/usr/bin	Weniger wichtige Programme
/usr/sbin	Weniger wichtige nur-root-Programme
/var	
/var/log	Logdateien

7.3 Kommandozeilenbefehle

```

man Programmname
    Zeigt Hilfe zu einem Programm an

df -h
    Zeigt Plattenplatz an

top
ps xua
    Zeigt laufende Programme an

ls -l Pfad
cat Pfad
less Pfad
    Verzeichnisanzeige
    Dateianzeige
    Navigierbare Dateianzeige

cat > Pfad
    Schreibt in Datei,
    Ende mit ^D (<Strg>+<D>)
> Pfad
    Leert Datei

cp Quelle Ziel
cp -r Quelle Ziel
cp -a Quelle Ziel
    Kopieren
    -r kopiert rekursiv -- auch Verzeichnisse
    -a behält Berechtigungen etc. bei

mv Quelle Ziel
    Benennt um/verschiebt

rm Pfad
rm -r Pfad
rm -rf Pfad
    Löscht
    -r löscht auch Verzeichnisse
    -f tut dies auch bei "schreibge-
    schützten" Dateien (w-Recht fehlt)

mkdir Pfad
rmdir Pfad
cd Pfad
    Erzeugt ein Verzeichnis
    Löscht ein leeres Verzeichnis
    Wechselt in Verzeichnis

mount Gerät Pfad
    Hängt ein Gerät in einen Pfad ein
    Beispiele:
    mount /dev/fd0 /mnt
    mount /dev/cdrom /mnt

umount Pfad
umount Gerät
    Hängt ein Gerät aus

```

```

ifconfig
route -n
                Zeigt Netzwerkinformationen an
ping Adresse   Pingt einen Computer an
traceroute Adresse
                Findet Weg zu einem Computer heraus

halt            Fährt Computer herunter
reboot         Startet Computer neu

passwd         Ändert das Passwort des
                angemeldeten Benutzers

apt-get update
                Aktualisiert Paketinformationsdatebank
apt-get dist-upgrade
                Aktualisiert das System
                (nach apt-get update ausführen!)
apt-cache search Suchbegriff
                Sucht in Paketdatenbank
apt-get install Paket
                Installiert ein Paket
apt-get remove Paket
                Deinstalliert ein Paket

```

7.4 Vi

7.4.1 Aufruf

```

vi            Startet Vi mit leerer Datei
vi Pfad     Startet Vi und lädt Datei

```

7.4.2 Kommandomodus

Nach dem Start befindet man sich im Kommandomodus. Mehrmaliges Drücken von »<Esc>« führt aus anderen Modi zurück zum Kommandomodus.

```

i            Wechselt in Eingabemodus
dd          Löscht gesamte Zeile
:           Wechselt in Superkommandomodus

```

7.4.3 Eingabemodus

Im Eingabemodus werden Tastendrucke nicht gesondert interpretiert, sondern einfach in den Dateipuffer eingefügt.

7.4.4 Superkommandomodus

q	Beendet
q!	Beendet auch, wenn die Datei nicht gespeichert wurde
w	Speichert Datei
w!	Speichert Datei auch, wenn sie "schreibgeschützt" ist
w Pfad	Speichert unter neuem Dateinamen
wq	Speichert und beendet
e Pfad	Lädt Pfad
(nichts)	Zurück in Kommandomodus

7.5 Squid

```
/etc/squid.conf
    Hauptkonfigurationsdatei
    (enthält Zeitintervalle, Computer-
    gruppen etc.)
/etc/squid/boese-seiten
    Enthält Liste gesperrter Seiten
```

Veränderungen an der Konfiguration werden erst nach einem Neulernen der Konfiguration durch Squid wirksam. Dies kann geschehen durch einen Neustart des Servers (»reboot«), durch einen Neustart von Squid. . .

```
/etc/init.d/squid restart
```

...oder – am schnellsten – durch

```
/etc/init.d/squid reload
```

„Funktioniert das Internet nicht“, kann das seitens Squid den Grund haben, dass Squid nicht in seinen Cache schreiben kann – stimmen die Rechte des Cacheverzeichnisses (»/home/squidXXX«) und ist genügend Plattenplatz verfügbar?

7.6 CUPS

Druckt der Drucker nicht? – Neustart von CUPS, am einfachsten durch Neustart des Servers. Stimmen die Berechtigungen des Spoolverzeichnisses (\gg /home/printjobs \ll) und ist genügend Plattenplatz verfügbar?

21.02.2007

8 Grenzwerte bei rationalen Funktionen

8.1 Grundlegende Terminologie

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)};$$

- z : Zählerpolynom
 n : Nennerpolynom
- Zählergrad: Größter Exponent, der im Zählerpolynom z verwendet wird
Nennergrad: Größter Exponent, der im Nennerpolynom n verwendet wird
Höchste Potenz: $x^{\text{insgesamt größter Exponent}}$
- „Grenzwert im Unendlichen existiert nicht“:
Man schreibt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$, meint aber (trotz des Gleichheitszeichens), dass der Grenzwert nicht existiert – dass es keinen Wert gibt, dem sich f immer weiter annähert; stattdessen divergiert f („haut ins Unendliche ab“).
- $\lim_{x \rightarrow x_0+}$: Man nähert sich von rechts, also von größeren x -Werten als x_0 , an die Stelle x_0 an (andere Schreibweisen sind auch üblich)
 $\lim_{x \rightarrow x_0-}$: Man nähert sich von links, also von kleineren x -Werten als x_0 , an die Stelle x_0 an

Beispiel:

$$f(x) = \frac{3x^2+5x}{9x^3-2x+3}$$

- Zählerpolynom: $z(x) = 3x^2 + 5x$
Nennerpolynom: $n(x) = 9x^3 - 2x + 3$
- Zählergrad: 2 (wg. $3x^2$)
Nennergrad: 3 (wg. $9x^3$)
Höchste Potenz: x^3

8.2 Verhalten im Unendlichen

Gefragt ist nach dem Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{z(x)}{n(x)}$

8.2.1 Anschaulich

Im Unendlichen (egal ob positiv oder negativ Unendlichen) zählen nur die jeweils höchsten Potenzen, die anderen „sind so klein, dass sie nichts ausmachen“.

Beispiele:

- $f(x) = \frac{3x^2+5x}{9x^3-2x+3} \approx \frac{3x^2}{9x^3} = \frac{1}{3x}$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x} = 0$;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3x} = 0$;
- $f(x) = \frac{3x^2+5x}{9x^2-2x+3} \approx \frac{3x^2}{9x^2} = \frac{1}{3}$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$;
- $f(x) = \frac{3x^3+5x}{9x^2-2x+3} \approx \frac{3x^3}{9x^2} = \frac{x}{3}$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3} = \infty$;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$;

8.2.2 Formal

Zähler und Nenner beide durch die höchste Potenz teilen, also mit der höchsten Potenz kürzen.

Beispiele:

- $f(x) = \frac{3x^2+5x}{9x^3-2x+3}$;

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2+5x}{9x^3-2x+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2/x^3+5x/x^3}{9x^3/x^3-2x/x^3+3/x^3} = \frac{0+0}{9-0+0} = \frac{0}{9} = 0;$$
- $f(x) = \frac{3x^2+5x}{9x^2-2x+3}$;

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2+5x}{9x^2-2x+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2/x^2+5x/x^2}{9x^2/x^2-2x/x^2+3/x^2} = \frac{3+0}{9-0+0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};$$
- $f(x) = \frac{3x^3+5x}{9x^2-2x+3}$;

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3+5x}{9x^2-2x+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3/x^3+5x/x^3}{9x^2/x^3-2x/x^3+3/x^3} = ?;$$

Problem: Nenner ist Null \rightarrow den Grenzwertübergang kann man nicht ausführen; der Grenzwert existiert nicht, f divergiert also.

8.2.3 Merkregeln

- Zählergrad < Nennergrad: Funktion konvergiert gegen Null (bei beiden Seiten, also wenn gegen $-\infty$ und gegen $+\infty$ gehend)
- Zählergrad = Nennergrad: Funktion konvergiert (bei beiden Seiten) gegen den Wert, der sich ergibt, wenn man alle bis auf die jeweils höchste Potenzen LÖSCHT

Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2+5x}{9x^2-2x+3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};$$

- Zählergrad > Nennergrad: Funktion divergiert; der Grenzwert existiert nicht

Ob die Funktion gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt, wenn man gegen $+\infty$ oder $-\infty$ läuft, erkennt man am einfachsten über die anschauliche Argumentation.

8.3 Verhalten an einer bestimmten Stelle

Gefragt ist nach dem Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{z(x)}{n(x)}$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$; hier geht es also nicht um das Verhalten im Unendlichen.

8.3.1 Vorgehen zum Bestimmen des Grenzwerts an einer bestimmten Stelle

Kürzen

Man versucht, den Unterausdruck, der Probleme macht (weil er zu einer Division durch Null führen würde), zu kürzen:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-2) = 1-2 = -1;$$

Faktorisieren

Man versucht, Zähler- und Nennerpolynom zu faktorisieren, um danach kürzen zu können:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = (\text{wie oben}) = -1;$$

Faktorisieren von quadratischen Ausdrücken über die Lösungsformel: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ mit $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

Faktorisieren von kubischen Ausdrücken durch Erraten einer Nullstelle und anschließender Polynomdivision

h-Methode

Man drückt das Annähern gegen die Stelle x_0 durch Annähern an 0 aus. Diese Methode kann man nicht anwenden, wenn man eh schon den Grenzwert an der Stelle 0 bestimmen will.

Beispiel (Substitution $x = 1 + h$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2-3x+2}{(1+h)^{-1}} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(1+h)^2-3(1+h)+2}{1+h-1} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1+2h+h^2-3-3h+2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2-h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h-1) = -1; \end{aligned}$$

Man lässt das h immer von rechts gegen 0 gehen, unabhängig davon, ob der ursprüngliche Grenzwertprozess von links oder rechts durchgeführt werden sollte.

Man substituiert wie folgt:

- $x = x_0 + h$, wenn der ursprüngliche Grenzwertprozess von rechts ausgeführt werden sollte
- $x = x_0 - h$, wenn der ursprüngliche Grenzwertprozess von links ausgeführt werden sollte

8.3.2 Anwendungen des Grenzwerts an einer bestimmten Stelle

Behebung von Definitionslücken

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

Man kann eine Funktion an einer Definitionslücke dann stetig ergänzen, wenn der Grenzwert von links mit dem von rechts an der Stelle übereinstimmt:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (\text{wie oben}) = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \dots = -1;$$

Man kann somit folgende Funktion \tilde{f} konstruieren, die in allen Stellen, an denen auch die ursprüngliche Funktion f definiert ist, mit f übereinstimmt, und die an der Definitionslücke – anders als f – kein Loch hat, sondern wohldefiniert ist:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{für } x \neq 1; \\ -1 & \text{für } x = 1; \end{cases}$$

Hat man zum Bestimmen der Grenzwerte faktorisiert, kann man \tilde{f} auch nicht durch eine abschnittsweise Definition ausdrücken:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = (\dots \text{faktorisieren} \dots) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1};$$

$$\tilde{f}(x) = x - 2;$$

Obacht: Auch wenn man den Funktionsterm der ursprünglichen Funktion kürzt, also schreibt...

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = (\dots \text{faktorisieren} \dots) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x - 2;$$

...so ist die ursprüngliche Funktion trotzdem nicht an der problematischen Stelle definiert! Der Definitionsbereich ändert sich nicht durchs Kürzen!

Überprüfung auf Stetigkeit

Eine Funktion f ist an einer Stelle x_0 genau dann stetig, wenn der Grenzwert von links mit dem von rechts und zusätzlich noch dem Funktionswert übereinstimmt; in Symbolen:

$$f \text{ stetig an } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0);$$

Sollte einer der beiden Grenzwerte oder sogar beide Grenzwerte nicht existieren, so ist die Funktion an der jeweiligen Stelle nicht stetig.