Themenschwerpunkt D

Quantenmechanik

Aufgabe 1: Bewegung im Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem unendlich tiefen Potentialtopf der Breite $2a$, der durch das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben wird.

a) Bestimmen Sie die normierten Wellenfunktionen $\psi_0(x)$ des Grundzustands und $\psi_1(x)$ des ersten angeregten Zustands sowie die zugehörigen Eigenenergien E_0 bzw. E_1. (9 Punkte)

b) Berechnen Sie für den Zustand

$$\phi(x) = \psi_0(x)\cos(\alpha) + \psi_1(x)\sin(\alpha)$$

die Ortsaufenthaltswahrscheinlichkeit in der linken Hälfte des Potentials ($-a < x < 0$) als Funktion des Parameters α. Für welchen Wert von α ist die Wahrscheinlichkeit am größten, das Teilchen in der linken Potentialhälfte zu finden? (8 Punkte)

c) Es soll nun die Dynamik des Zustands untersucht werden, der zur Zeit $t = 0$ durch

$$\chi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0(x) - \psi_1(x))$$

beschrieben wird. Wie lautet die Wellenfunktion $\chi(x, t)$ für beliebige Zeiten? Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit $\langle x(t)\rangle$ des Ortserwartungswertes. (8 Punkte)

Hinweis: Gelegentlich können Symmetriebetrachtungen Rechenarbeit ersparen.

Nützliche Formeln:

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big)$$

$$\int \mathrm{d}x\, x\sin(ax) = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Ableitung der Eigenenergien

Der Hamiltonoperator $\hat{H}(\lambda)$ eines Teilchens soll von einem Parameter λ abhängen. Die Eigenzustandsvektoren $|n\rangle_\lambda$ und die Energien $E_n(\lambda)$ sind daher ebenfalls eine Funktion dieses Parameters.

a) Beweisen Sie das Hellmann-Feynman-Theorem:

$$\frac{dE_n}{d\lambda} = \langle n|_\lambda \frac{d\hat{H}}{d\lambda} |n\rangle_\lambda$$

(10 Punkte)

Als Beispiel betrachten wir ein geladenes Teilchen in einem Potential, das unter Raumspiegelung $\vec{r} \to -\vec{r}$ invariant ist. Das Teilchen werde durch den Hamiltonoperator $\hat{H}_0$ beschrieben. Zusätzlich werde ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E}$ eingeschaltet.

b) Geben Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}_1$ an, welcher die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Feld $\vec{E}$ beschreibt. (5 Punkte)

c) Zeigen Sie unter Verwendung des Hellmann-Feynman-Theorems und von Symmetrieargumenten, dass der lineare Stark-Effekt für alle nicht-entarteten Eigenzustände von H_0 verschwindet. Das heißt, die Energien dieser Eigenzustände des Teilchens ändern sich nicht linear, sondern erst in höherer Ordnung mit dem Betrag des elektrischen Feldes. (10 Punkte)