Themenschwerpunkt A

Mechanik

Aufgabe 1: Teilchen auf Spiralbahn

Betrachten Sie einen Massenpunkt m, der die Beschleunigung

$$a_z = -\frac{R}{(t+\tau)^2}$$

in z-Richtung erfährt, wobei $\tau = \text{const}$ eine Zeitskala und $R = \text{const}$ eine Längenskala ist. Insgesamt bewegt sich der Massenpunkt auf der durch ihre kartesischen Komponenten definierten Bahnkurve

$$\vec{r} = \big(R\varphi(t)\cos\varphi(t),\, R\varphi(t)\sin\varphi(t),\, R\varphi(t)\big)\,,$$

wobei die Kurve durch $\varphi(t) \geq 0$ parametrisiert ist. Zur Zeit $t = 0$ sei das Teilchen am Ursprung; die z-Komponente der Anfangsgeschwindigkeit sei $v_z = R/\tau$.

a) Bestimmen Sie $\varphi(t)$ und $\vec{r}(t)$ für $t \geq 0$. (10 Punkte)

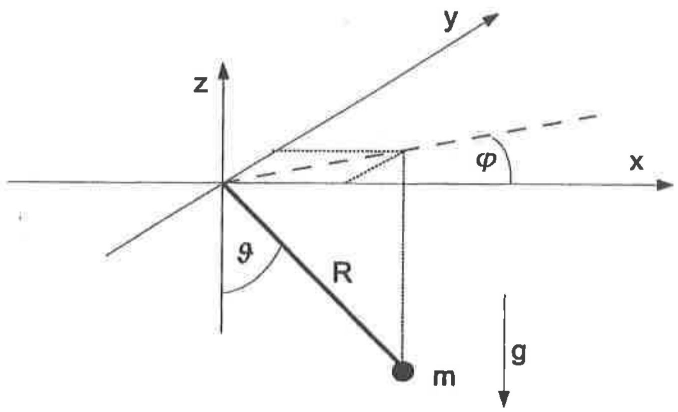
b) Berechnen Sie die kinetische Energie und den Drehimpuls des Teilchens als Funktion der Zeit t.

Hinweis: Die Rechnung bleibt relativ kurz, wenn Sie die explizite Abhängigkeit $\varphi(t)$ erst zum Schluss auswerten. (10 Punkte)

c) Geben Sie die Kraft an, die zur Zeit $t = 0$ auf das Teilchen wirkt. (5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Sphärisches Pendel



Ein punktförmiger Körper der Masse m mit den kartesischen Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z)$ kann sich auf einer Kugeloberfläche, beschrieben durch $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = \text{const.}$, frei bewegen. Die Erdbeschleunigung g wirke in Richtung der negativen z-Achse. Wählen Sie als generalisierte Koordinaten den Winkel ϑ zwischen $\vec{r}$ und der *negativen* z-Achse, sowie den Azimutwinkel φ (siehe Skizze).

a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion geschrieben werden kann als

$$L = \frac{m}{2}R^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta\right) + mgR\cos\vartheta\,.$$

Geben Sie zwei Erhaltungsgrößen an (mit kurzer Begründung). (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen des Systems. und untersuchen Sie diese auf Stabilität. (4 Punkte)

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Zeigen Sie, dass sich diese für den Fall $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const.}$ auf die des ebenen Pendels reduzieren. (5 Punkte)

d) Bestimmen Sie nun die Lösung der allgemeinen Bewegungsgleichungen unter der Vereinfachung $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{const.}$ mit $\vartheta_0 > 0$. (5 Punkte)

e) Welchen Betrag v hat die Geschwindigkeit des Pendelkörpers bei Erreichen des tiefsten Punkts ($z = -R$) für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, $\dot{\vartheta}(0) = 0$, $\vartheta(0) = \vartheta_0$?

Hinweis: Verwenden Sie den Energiesatz. (5 Punkte)