Oberflächenintegrale

$$\int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{F}$$

∂V: Oberfläche des Volumens V

$d\vec{A}$: vektorielles Oberflächenelement

$d\vec{A} = \vec{e}_u \times \vec{e}_v \, du \, dv$ mit $\vec{e}_u, \vec{e}_v$ Einheitsvektoren auf der Oberfläche

$\vec{F}$: vektorwertige Funktion

Beispiel: $d\vec{A}$ für Kugeloberfläche

Kugelkoordinaten: $\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \vec{r}(r, \vartheta, \varphi)$

Kugeloberfläche: $\vec{r} = \vec{r}(\vartheta, \varphi)$ mit $r = \text{const}$

$$\vec{e}_\vartheta = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}\right|} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d\vec{A} = \vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi \, r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \vec{e}_r \, r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

Satz von Gauß

$$\int_V dV \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E}$$

Beispiel: Punktladung

$$\rho(\vec{r}) = q \, \delta(\vec{r})$$

1. Maxwell-Gleichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \int_V dV \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_V dV \, \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

~~rechte~~ linke Seite: $\int_V dV \, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{E} \underset{\text{wähle Kugeloberfläche}}{=} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \sin\vartheta \, \vec{E} \cdot \vec{e}_r = 4\pi r^2 E_r$

rechte Seite: $\int_V dV \, \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Somit: $4\pi r^2 E_r = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$ (elektrisches Feld einer Punktladung)