Lagrangegleichungen 1. Art

Zwangsbedingungen

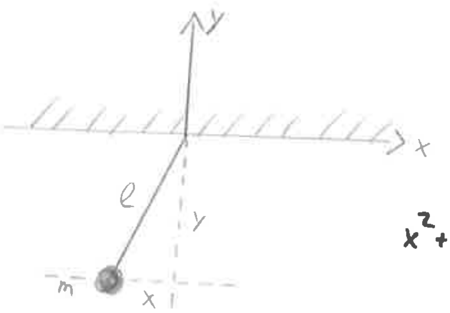
Newtonsche Axiome nicht immer direkt anwendbar, da oft neben einer Kraft $\vec{K}$ eine i.A. unbekannte Zwangskraft $\vec{Z}$ wirkt:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z}$$

Teilchen unterliegt den Zwangsbedingungen

$$g_1(\vec{r},t) = 0, \quad g_2(\vec{r},t) = 0 \qquad \text{(holonom)}$$

Beispiel: Fadenpendel



$$x^2 + y^2 = l^2 \Rightarrow g_1 = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

$$g_2 = z = 0$$

Zwangskräfte

$\vec{Z}$ hängt i.A. von der tatsächlichen Bewegung ab. Zwangskräfte stehen orthogonal zur Fläche, die durch Zwangsbedingung festgelegt wird.

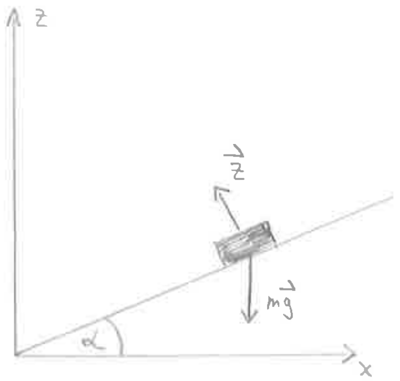
$$\Rightarrow \vec{Z}(\vec{r},t) = \lambda_1(t)\,\vec{\nabla} g_1(\vec{r},t) + \lambda_2(t)\,\vec{\nabla} g_2(\vec{r},t) \qquad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

(analog für mehrere Massenpunkte)

Allgemeines Vorgehen

1. Formulierung der Zwangsbedingungen
2. Aufstellen der Lagrangegleichungen
3. Eliminierung der λ_i
4. Lösen der Bewegungsgleichungen und Bestimmung der Zwangskräfte

Beispiel: schiefe Ebene



① Zwangsbedingungen

$$x \sin\alpha = z\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad g_1 = x\sin\alpha - z\cos\alpha = 0$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad g_2 = y = 0$$

② Lagrangegleichungen

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z} = -mg\vec{e}_z + \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2$$

in Komponenten:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \partial_x g_1 + \lambda_2 \partial_x g_2 = \lambda_1 \sin\alpha$$

$$m\ddot{y} = \lambda_1 \partial_y g_1 + \lambda_2 \partial_y g_2 = 0$$

$$m\ddot{z} = -mg + \lambda_1 \partial_z g_1 + \lambda_2 \partial_z g_2 = -mg - \lambda_1 \cos\alpha$$

③ Eliminierung von λ_1 und λ_2

a) g_1 und g_2 2x differenzieren

$$\ddot{g}_1 = \ddot{x}\sin\alpha - \ddot{z}\cos\alpha = 0$$

$$\ddot{g}_2 = 0$$

b) Einsetzen von $\ddot{x}, \ddot{y}$ und $\ddot{z}$ aus Schritt ② in

$$0 = \ddot{x}\sin\alpha - \ddot{z}\cos\alpha = \frac{\lambda_1}{m}\sin^2\alpha + \left(g + \frac{\lambda_1}{m}\cos\alpha\right)\cos\alpha = \frac{\lambda_1}{m}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + g\cos\alpha$$

$$= \frac{\lambda_1}{m} + g\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0$$

④ Lösen der Bewegungsgleichungen und Bestimmen der Zwangskräfte

Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \sin\alpha = -mg\sin\alpha\cos\alpha$$

$$m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} = -mg + mg\cos^2\alpha = -mg(1-\cos^2\alpha) = -mg\sin^2\alpha$$

$$x(t) = x(0) + v_x(0)t - \tfrac{1}{2}mg\sin\alpha\cos\alpha\, t^2$$

$$y(t) = 0 \quad \text{(Zwangsbedingung!)}$$

$$z(t) = z(0) + v_z(0)t - \tfrac{1}{2}mg\sin^2\alpha\, t^2$$

Zwangskraft $\vec{Z}$:

$$\vec{Z} = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2 = -mg \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Lagrangegleichungen 2. Art

Lagrangefunktion $\mathcal{L}(q,\dot q,t) = T(q,\dot q,t) - U(q,t)$ $\quad q, \dot q$ generalisierter Ort / Impuls

Euler-Lagrange-Gleichungen (Lagrangegleichungen 2. Art)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot q,t)}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot q,t)}{\partial q_k} = 0$$

Allgemeines Vorgehen

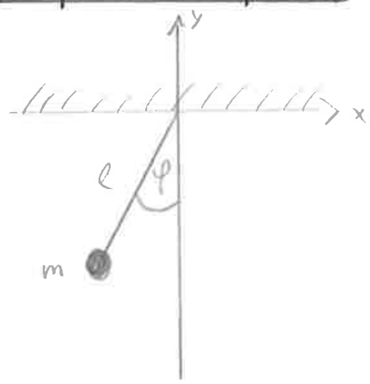
① Wahl von generalisierten Koordinaten q_i

② Bestimmung der Lagrangefunktion $\mathcal{L}$

③ Aufstellen der Bewegungsgleichungen

④ Lösen der Bewegungsgleichungen

Beispiel: Fadenpendel



① $x = l\sin\varphi, \; y = -l\cos\varphi$

② $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2}m\left((l\cos\varphi\,\dot\varphi)^2 + (l\sin\varphi\,\dot\varphi)^2\right)$

$= \frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2$

$V = mgy = -mgl\cos\varphi \quad , \quad \mathcal{L} = T - V = \frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2 + mgl\cos\varphi$

④ $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$

$ml^2\ddot\varphi + mgl\cos\varphi = 0$

$\boxed{3}$ $\Rightarrow \ddot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

Lösung für $|\varphi| \ll 1$: $\sin\varphi \approx \varphi$

$\ddot\varphi + \omega^2\varphi = 0$ mit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\varphi(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$, A, B aus Anfangsbed.