2011 H2 / Kräftefreie Bewegung auf Kugel

a)
$$x = R\cos\varphi\sin\vartheta \qquad \dot{x} = R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi - R\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$y = R\sin\varphi\sin\vartheta \qquad \dot{y} = R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + R\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$z = R\cos\vartheta \qquad \dot{z} = -R\dot{\vartheta}\sin\vartheta$$

Lagrangefkt: $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{mR^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\vartheta}) - mR^2\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta = mR^2[\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta] = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta) - 0 = mR^2[\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + 2\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}] = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \qquad (2)$$

b) Die Lagrangefkt hängt nicht von φ ab $\Rightarrow$ φ ist zyklische Variable

zugehörige Erhaltungsgröße ist L_z: Drehimpuls um z-Achse

Auf Grund von Kugelsymmetrie ~~ist~~ sind auch L_y und L_x erhalten, also komplette Drehimpulserhaltung (Kugel ist rotationssymmetrisch)

c) $L_z = mR^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta = \text{const}$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_z}{mR^2\sin^2\vartheta}$$

in (1) einsetzen:
$$\ddot{\vartheta} - \frac{L_z^2}{m^2R^4\sin^4\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta = \ddot{\vartheta} - \frac{L_z^2\cos\vartheta}{m^2R^4\sin^3\vartheta} = 0 \qquad (3)$$

Voilà: (3) hängt nur noch von ϑ ab und hat die Form $\frac{mR^2}{2}\ddot{\vartheta} + V_{eff}(\vartheta) = 0$ mit dem effektiven Potential $V_{eff}(\vartheta) = \frac{L_z^2}{2mR^2\sin^2\vartheta}$

d) maximaler Abstand vom Äquator $\Leftrightarrow \dot{\vartheta} = 0$,

also gilt für den Winkel ϑ_{max} dort:

$$\frac{mR^2}{2}\dot{\vartheta}(0)^2 + V_{eff}(\vartheta(0)) = V_{eff}(\vartheta_{max}) \qquad (4)$$

$$\Rightarrow V_{eff}(\vartheta) \overset{L_z = mR^2\dot{\varphi}(0)^2}{=} \frac{mR^2\dot{\varphi}(0)^2}{2\sin^2\vartheta}$$

Einsetzen in (4) und auflösen:

$$\Rightarrow \vartheta_{max} = \arcsin\left(\frac{\dot{\varphi}(0)}{\sqrt{\dot{\vartheta}(0)^2 + \dot{\varphi}(0)^2}}\right)$$

$$\vartheta_{max} = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\dot{\varphi}(0)}{\sqrt{\dot{\vartheta}(0)^2 + \dot{\varphi}(0)^2}}\right)$$