2014 F1)

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} W \left[\delta(x-a) + \delta(x+a) \right] \qquad \text{mit } W > 0$$

$$\varphi_\pm(x) = A \begin{cases} e^{k(x+a)} & \text{für } x < -a \\ b\left(e^{kx} \pm e^{-kx}\right) & \text{für } -a \le x \le a \\ \pm e^{-k(x-a)} & \text{für } x > a \end{cases}$$

$$x = \pm a : \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varphi'(\pm a + \varepsilon) - \varphi'(\pm a - \varepsilon) \right] = -W \varphi(\pm a)$$

a) i) $\delta(x)$ hat die Einheit $\frac{1}{x}$, also hat W die Einheit 1/Länge (z.B. m^{-1})

ii) Inversionssymmetrie des Potentials => Eigenfunktionen müssen gerade oder ungerade sein (Parität)

iii) Eigenfunktionen im Bereich konstanten Potentials sind Exponentialfunktionen mit reellen Argumenten für Energien kleiner als die Potentialstärke

iv) Eigenfunktionen verschwinden für große Werte von $|x|$

v) Energien sind

$$E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

b) i) Stetigkeit von $\varphi(x)$ bei

- $x = -a$: $\quad 1 = b\left(e^{-ka} \pm e^{ka}\right) \quad \Rightarrow b = \frac{1}{e^{-ka} \pm e^{ka}} \quad (1)$

- $x = a$: $\quad \pm 1 = b\left(e^{ka} \pm e^{-ka}\right) \quad | \cdot \pm 1$

$$1 = b\left(e^{-ka} \pm e^{ka}\right)$$ => gibt also gleiche Bedingung wie (1)

ii) Sprungbedingung ~~bei~~ für $\varphi'(x)$ ~~bei~~

$$\varphi'_\pm(x) = Ak \begin{cases} e^{k(x+a)} & \text{für} \quad x < -a \\ b\left(e^{kx} \mp e^{-kx}\right) & \text{für} \quad -a \leq x \leq a \\ \mp e^{-k(x-a)} & \text{für} \quad x > a \end{cases}$$

- bei $x = -a$:

$$bk\left(e^{-ka} \mp e^{ka}\right) - k = -W\varphi(-a) = -W \quad \Rightarrow \quad k - W = bk\left(e^{-ka} \mp e^{ka}\right) \qquad (2)$$

- bei $x = +a$:

$$\mp k - bk\left(e^{ka} \mp e^{-ka}\right) = -W\varphi(a) = \mp W \qquad | \cdot \pm 1$$

$$-k - bk\left(-e^{-ka} \pm e^{ka}\right) = -W$$

$$bk\left(e^{-ka} \mp e^{ka}\right) - k = -W \quad \Rightarrow \text{gibt gleiche Bedingung wie (2)}$$

Einsetzen von (1) in (2):

$$(k - W) = \frac{k\left(e^{-ka} \mp e^{ka}\right)}{e^{-ka} \pm e^{ka}}$$

$$(k-W)\left(e^{-ka} \pm e^{ka}\right) = k\left(e^{-ka} \mp e^{ka}\right)$$

$$W\left(-e^{-ka} \mp e^{ka}\right) = k\left(\underline{e^{-ka}} \mp e^{ka} \underline{- e^{-ka}} \mp e^{ka}\right) = \mp 2ke^{ka}$$

$$W = \frac{\mp 2ke^{ka}}{-e^{-ka} \mp e^{ka}} = \cancel{\frac{\mp 2ke^{2ka}}{1 \pm e^{2ka}}} = \frac{\mp 2k}{-e^{-2ka} \mp 1}$$

$$W = \frac{2k}{1 \pm e^{-2ka}} \quad \Leftrightarrow \quad Wa = \frac{2ka}{1 \pm e^{-2ka}} \qquad (3)$$

c) i) Eine Möglichkeit (3) zu lösen besteht darin, die rechte Seite von (4) in einen Graph einzuzeichnen und die Schnittpunkte mit der Parallelen $y = Wa$ zur x-Achse zu suchen. (siehe Skizze/Graph)

ii) <u>Für $ka \ll 1$:</u>

Für φ_+ : $$Wa = \frac{2ka}{1+e^{-2ka}} \approx \frac{2ka}{1+1} = ka$$

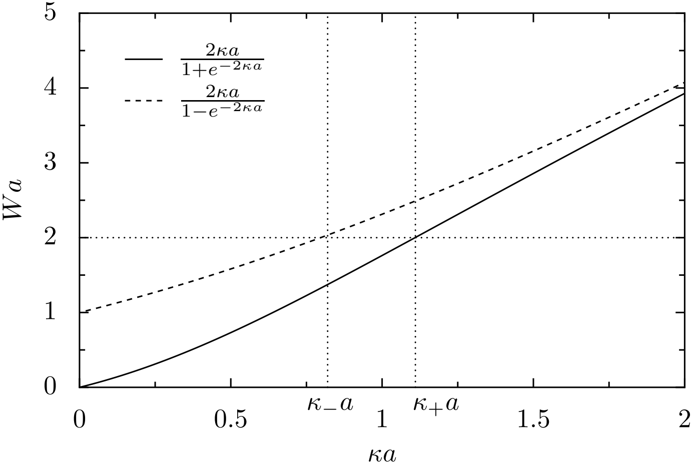
Für φ_- : $$Wa = \frac{2ka}{1-e^{-2ka}} \overset{\text{Taylor}}{\approx} 1 + ka$$

$$\Rightarrow \quad ka \approx \begin{cases} Wa & \text{für } \varphi_+ \\ Wa - 1 & \text{für } \varphi_- \end{cases}$$

iii) <u>Für $ka \gg 1$:</u>

$$Wa = \frac{2ka}{1 \pm e^{-2ka}} \overset{\frac{1}{1\pm x} \approx 1 \mp x}{\approx} 2ka\left(1 \mp e^{-2ka}\right)$$

$$\Rightarrow ka \approx \frac{Wa}{2} \frac{1}{1 \mp e^{-2ka}} \approx \frac{Wa}{2}$$


$\frac{2\kappa a}{1+e^{-2\kappa a}}$
$\frac{2\kappa a}{1-e^{-2\kappa a}}$
Wa
κa
$\kappa_- a$
$\kappa_+ a$
0
0.5
1
1.5
2
3
4
5

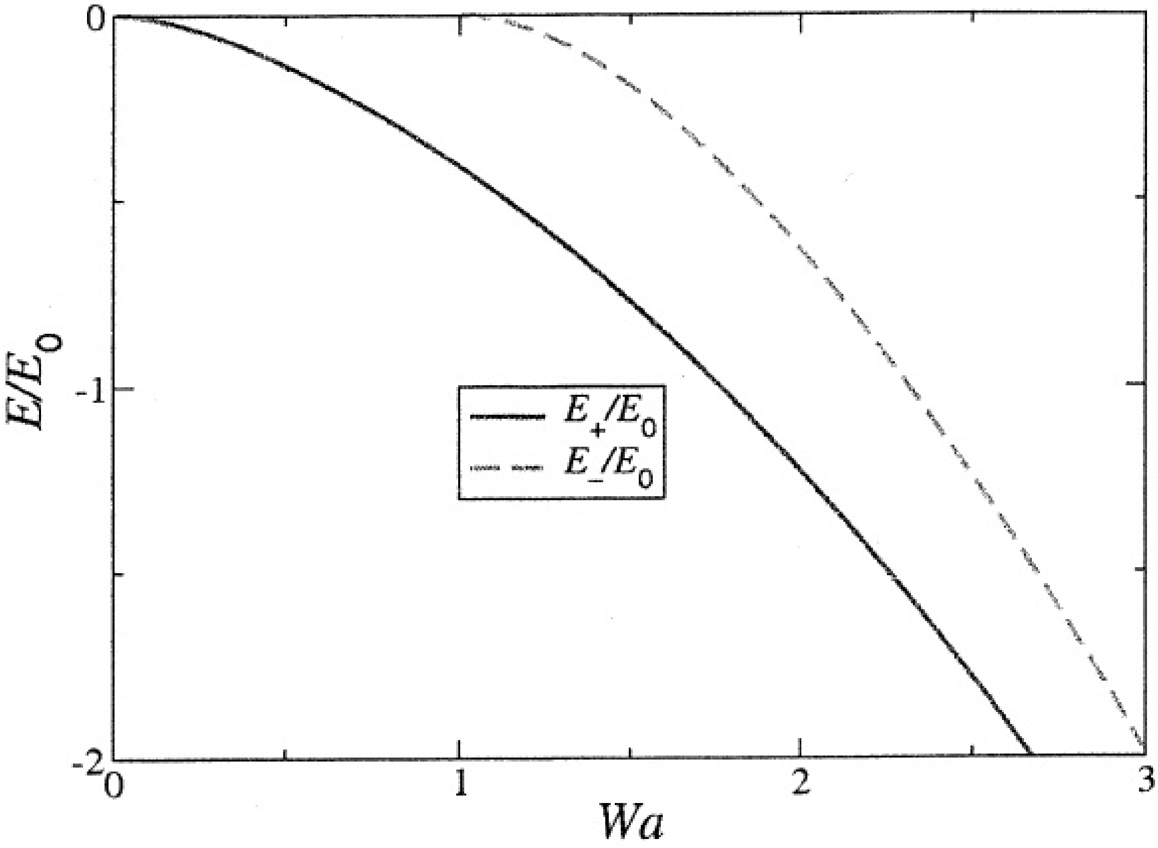


Abbildung 3: Die Energien in Einheiten von $E_0 = \hbar^2/2ma^2$