2014 H12

$$H = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad \vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}, \quad \vec{B} = B\vec{e_z}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

a) $$\vec{A} = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{div}\vec{A} = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ \checkmark$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{B}{2}\vec{e_z} \ \checkmark$$

b) $$(\vec{p}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{p})\,\Psi(\vec{r}) = \left[-i\hbar\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot(-i\hbar)\,\vec{\nabla}\right]\Psi(\vec{r})$$

$$= -i\hbar\left[\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\Psi(\vec{r})) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}))\right]$$

$$= -i\hbar\left[\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}) + \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}_{=0\ \text{(Coulomb-Eichung)}}\Psi(\vec{r}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}))\right] = 0$$

$$\Rightarrow [\vec{p}, \vec{A}] = 0$$

c) $$H = \frac{p^2}{2m_e} + \frac{e\vec{p}\cdot\vec{A}}{2m_e} + \frac{e\vec{A}\cdot\vec{p}}{2m_e} + \frac{e^2\vec{A}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \underbrace{\frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{=H_0} + \underbrace{\frac{e\vec{p}\cdot\vec{A}}{m_e} + \frac{e^2\vec{A}^2}{2m_e}}_{=H'}$$

$$H' = \frac{e}{m_e}\vec{p}\cdot\vec{A} + \frac{e^2\vec{A}^2}{2m_e} = \frac{eB}{2m_e}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^2B^2}{8m_e}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\omega_c}{2}\underbrace{(xp_y - yp_x)}_{=L_z} + \frac{m_e\omega_c^2}{8}(y^2+x^2) = \frac{\omega_c}{2}L_z + \frac{m_e\omega_c^2}{8}(r^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta)$$

$$= \frac{\omega_c}{2}L_z + \frac{m_e\omega_c^2}{8}r^2\sin^2\vartheta$$

d) $$\langle n l m | \frac{\omega_c}{2} L_z | n l m\rangle = \frac{\omega_c}{2}\langle n l m | L_z | n l m\rangle = \frac{\omega_c}{2}\hbar m \cdot \underbrace{\langle n l m | n l m\rangle}_{=1} = \frac{\omega_c}{2}\hbar m$$

Die Entartung wird für $B \neq 0$ für unterschiedliche Werte von m aufgehoben, die Zustände $|n l m_1\rangle$ und $|n l m_2\rangle$ haben für $m_1 \neq m_2$ unterschiedliche Energien.
Die Entartung bzgl. l bleibt erhalten: Die Zustände $|n l_1 m\rangle$ und $|n l_2 m\rangle$ haben die gleiche Energie.

e) $\langle n l m | \frac{\omega_c}{2} L_z | n l m \rangle = \hbar \frac{\omega_c}{2} m = 0$ für $m = 0$

$$\langle n l m | \frac{m_e}{8} \omega_c^2 r^2 \sin\vartheta | n l m \rangle = \frac{m_e}{8} \omega_c^2 \langle n l m | r^2 \sin^2\vartheta | n l m \rangle$$

$$\overset{m=0}{=} \frac{m_e}{8} \omega_c^2 \langle n l 0 | r^2 \sin^2\vartheta | n l 0 \rangle = \frac{m_e}{8} \omega_c^2 \langle r^2 \sin^2\vartheta \rangle \overset{!}{=} -\frac{1}{2} \chi \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$\Rightarrow \chi = -\frac{2\mu_0}{B^2} \frac{m_e}{8} \frac{e^2 B^2}{m_e^2} \langle r^2 \sin^2\vartheta \rangle = -\frac{\mu_0}{4} \frac{e^2}{m_e} \langle r^2 \sin^2\vartheta \rangle$$

$$= -\frac{\mu_0}{4} \frac{4\pi}{\mu_0} \alpha^2 a_B \langle r^2 \sin^2\vartheta \rangle = -\pi \alpha^2 a_B \langle r^2 \sin^2\vartheta \rangle < 0 \Rightarrow \text{diamagn. Verhalten}$$

f) $l = n-1$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty r^2 dr\, r^2 R_{n,n-1}^2}{\int_0^\infty r^2 dr\, R_{n,n-1}^2} = \frac{\int_0^\infty dr\, r^4 \left(r^{n-1} e^{-r/na_B}\right)^2}{\int_0^\infty dr\, r^2 \left(r^{n-1} e^{-r/na_B}\right)^2}$$

$$= \frac{\int_0^\infty dr\, r^{2n+2} e^{-2r/na_B}}{\int_0^\infty dr\, r^{2n} e^{-2r/na_B}} = \frac{(2n+2)! \left(\frac{na_B}{2}\right)^{2n+3}}{(2n)! \left(\frac{na_B}{2}\right)^{2n+1}} = (2n+2)(2n+1) \frac{n^2 a_B^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} n^2 a_B^2 (n+1)(2n+1)$$

$$\Rightarrow \chi = -\pi \alpha^2 a_B \frac{1}{2} n^2 a_B^2 (n+1)(2n+1) \frac{2(l^2+l+1)}{(2l-1)(2l+3)} \overset{l=n-1}{=} -\pi \alpha^2 a_B^3 n^2 (n+1)(2n+1)$$

$$\times \frac{n^2 - 2n + 1 + n - 1 - 1}{(2n-2-1)(2n-2+3)} = -\pi \alpha^2 a_B^3 n^2 (n+1) \frac{n^2 - n - 1}{2n-3}$$

Für $n \gg 1$: $\chi \triangleq -\frac{\pi}{2} \alpha^2 a_B^3 n^2 (n+1) n \approx -\frac{\pi}{2} \alpha^2 a_B^3 n^4$